И.А. ИЗЮМОВ <izyumov-igor>@rambler.ru>,
МОУ гимназия № 3, г. Аксай, Ростовская обл.

Физико-математические цепи

Ключ. слова: непрерывная дробь; цепная дробь, 8 и 10 классы.

В теории чисел и алгебре раскрывается
загадочная реальность мира чисел.
Р. Курант

В настоящее время в различных областях теоретической и прикладной электротехники, в автоматике и вычислительной технике регулярно пользуются так называемыми *непрерывными схемами*. Для решения задач, связанных с анализом и синтезом таких схем, применяются особые математические методы, в том числе и *непрерывные дроби* [1, с. 224–233].

История математики утверждает, что первую достаточно полную теорию непрерывных дробей разработал Христиан Гюйгенс (1629–1695), работавший в 1680 г. над «планетной машиной», которая должна была воспроизводить движение планет при помощи множества зубчатых колес. При этом отношение числа зубцов одного колеса к числу зубцов другого должно было равняться отношению времён оборотов соответствующих двух планет вокруг Солнца. Математически задача сводилась к работе с дробями, имеющими очень большие числители и знаменатели. Задумав их понизить, Гюйгенс и пришёл к непрерывным дробям, показав, что числители и знаменатели подходящих дробей – числа взаимно простые и что подходящие дроби являются наилучшими приближениями соответствующего числа.

Первую систематическую теорию непрерывных дробей разработал Л. Эйлер (1707–1783), внедрив в математику в 1737 г. и сам термин «непрерывные дроби». Опубликовав по этому вопросу ряд работ, итоги которых были изложены им в первом томе его «Введения в анализ бесконечных» (1748), Эйлер ввёл в рассмотрение две формы непрерывных дробей:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}} \quad \text{и} \quad a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\ldots}}},$$

но сам преимущественно пользовался только первой. Заметим, что задача о представлении дроби $\dfrac{a_1}{a_2}$ в виде

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}},$$

где q_1 – целое число, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – натуральные числа, является одним из применений хорошо известного алгоритма Евклида [2, с. 51], содержательный смысл которого состоит в том, что для нахождения наибольшего общего делителя пары натуральных чисел a_1 и a_2 поступают следующим образом: деля a_1 на a_2, получают остаток a_3, затем, деля a_2 на a_3, получают остаток a_4, затем, деля a_3 на a_4, получают остаток a_5 и так далее до тех пор, пока некоторое число a_n не разделится на a_{n+1} нацело. Само же представление называется *конечной непрерывной,* или *цепной дробью* и имеет интересные практические приложения. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1 [2, с. 54, № 5.13]. **Приближение цепной дроби.** Между двумя параллельными осями вращения требуется так установить зубчатую передачу, чтобы отношение угловых скоростей вращения было по возможности более близким к числу 355/113. Один из способов состоит в том, чтобы получить точное значение указанного отношения, поместив на одной оси шестерёнку с 355 зубьями, а на другой – со 113 зубьями. Нельзя ли подобрать две шестерёнки, имеющие меньше 25 зубьев каждая, обеспечив при этом абсолютную погрешность, не превышающую 0,002?

Решение [2, с. 59–61, № 5.11]. Если бы мы захотели приблизить данную дробь $355/113 = 3,14159\ldots$ десятичной дробью $a/10^k$, то для достижения заданной точности потребовалось бы подобрать значения a и k из неравенства $|\,3,14159\ldots - a/10^k\,| < 0,002$. Проверка дробей $314/100 = 157/50$, $3142/1000 = 1571/500$, $31416/10000 = 3927/1250$ показывает их непригодность и убеждает нас в том, что такой перебор значений весьма затруднителен, да и вряд ли приведёт к успеху.

Попробуем приблизить данную дробь с помощью подходящих дробей к цепной дроби

$$\frac{355}{113}=3+\frac{1}{113/16}=3+\frac{1}{7+1/16}.$$

Первая подходящая дробь 3/1 даёт погрешность 355/113 – 3 = 16/113 > 0,002, а значит, не годится. Зато вторая подходящая дробь 22/7 отличается от третьей, равной исходной дроби, на величину $|355/113-22/7|=|-1/(113\times 7)|=1/791<0,002$.

<...>. Таким образом, шестерёнки с 22 и 7 зубьями удовлетворяют всем условиям задачи.

(Вполне возможно, что подобную задачу и решал когда-то Христиан Гюйгенс!)

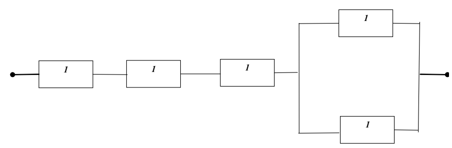
Задача 2 [2, с. 53, № 5.11]. **Комбинирование сопротивлений.** Известно, что если соединить несколько резисторов, имеющих сопротивления R_1, R_2, ..., R_k, в электрической цепи последовательно, то общее сопротивление будет равно $R_1 + R_2 + ... + R_k$, а если соединить эти же резисторы параллельно, то общее сопротивление окажется равным

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+...+\frac{1}{R_k}}.$$

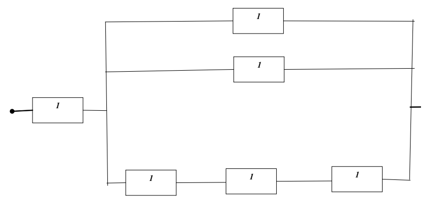
А теперь представьте, что у вас есть большое количество одинаковых резисторов единичного сопротивления. Можно ли, комбинируя их в электрической цепи, составить схему, имеющую сопротивление: *а*) $\frac{7}{2}$; *б*) $\frac{10}{7}$; *в*) вообще $\frac{a}{b}$?

Решение [2, с. 59–61]. Решение этой задачи может показаться на первый взгляд совсем очевидным, поскольку для любой дроби $\frac{a}{b}$ можно сначала соединить параллельно b единичных резисторов, получив сопротивление, равное $\frac{1}{b}$, а затем размножить эту схему в a экземплярах, соединив их последовательно. При этом в конечном счёте нам понадобится $a\times b$ резисторов единичного сопротивления. Например, для такого решения в п. *а* их нужно 7 × 2 = 14 штук, а для решения п. *б* 10 × 7 = 70 штук. Как показывает приводимое ниже решение, этот очевидный способ далеко не самый экономный: в п. *а* достаточно иметь всего 5, а в п. *б* – 6 резисторов.

а) Соединив параллельно два единичных резистора, получим сопротивление 1/2. Присоединив к нему последовательно ещё три единичных резистора, получим сопротивление $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.



б) С учётом разложения $\frac{10}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{3}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ требуемое сопротивление можно получить следующим образом: соединим последовательно один единичный резистор и блок, в котором параллельно соединены три резистора – два единичных и блок из трёх последовательных единичных.



Сопротивление второго блока равно 3, первого – $\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, общее $\frac{10}{7}$.

в) Пусть дробь $\frac{a}{b}$ разложена в цепную дробь

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}.$$

Соединим последовательно q_1 единичных резисторов и первый блок, в котором q_2 параллельно соединённых единичных резисторов соединим параллельно со вторым блоком, в котором q_3 параллельно соединённых единичных резисторов соединим последовательно с третьим блоком ... Так, чередуя последовательное и параллельное соединения при составлении каждого последующего блока, мы на предпоследнем шаге соединим последовательно или параллельно q_{n-1} единичных резисторов и $(n-1)$-й блок, в котором соединим, наоборот, параллельно или последовательно q_n единичных резисторов. Всего нам понадобится $q_1 + q_2 +...+ q_n$ резисторов, что, как правило, меньше, чем $a\times b$.

Докажем, что полученная схема имеет сопротивление a/b. Если мы временно отсоединим от цепи весь первый блок, то сопротивление будет равно q_1, то есть первой подходящей дроби к данной цепной дроби. Если временно отсоединим от цепи не первый, а второй блок, то сопротивление неполного первого блока будет равно $\frac{1}{q_2}$ и общее сопротивление будет равно $q_1 + \frac{1}{q_2}$, то есть второй подходящей дроби. Если отсоединим от цепи не второй, а третий блок, то сопротивление неполного второго блока будет равно q_3, первого –

$$\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1}+\frac{1}{q_3}} = \frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}$$

и общее сопротивление будет равно третьей подходящей дроби. Продолжая эти рассуждения, мы придем к тому, что если отсоединить только (n – 1)-й блок, то общее сопротивление будет равно (n – 1)-й подходящей дроби. Наконец, если ничего не отсоединять, то общее сопротивление будет равно последней подходящей дроби, то есть самой цепной дроби, равной $\frac{a}{b}$.

В заключение можно сказать, что непрерывные дроби имеют большое преимущество перед десятичными (и вообще систематическими) дробями, когда речь идёт (в основном) о теоретическом исследовании, и позволяют полнее и в чистом виде отображать свойства представляемого числа, так как они не связаны ни с какой системой счисления. Форма же записи систематической дроби зависит, как известно, не только от величины числа, но и от основания соответствующей системы. Каждое рациональное число может быть только единственным образом представлено в виде конечной непрерывной дроби, в то время как в виде десятичной дроби оно представляется как в конечной, так и в бесконечной (периодической) форме. Непрерывные дроби лучше систематических (в частности, десятичных) дробей удовлетворяют также (в основном) практическому требованию – давать наилучшие приближения.

Возникает вопрос: почему же непрерывные дроби сравнительно редко применялись в прошлом, да и в настоящее время мало применяются на практике? Это объясняется тем, что с точки зрения практики вычислений непрерывные дроби не удовлетворяют одному важнейшему требованию: для них нет никаких практически удобных правил арифметических действий. В этом отношении они не могут идти в сравнение с десятичными дробями, являющимися удобным орудием счёта. Вот почему в отличие от десятичных дробей, широко используемых в практике счёта, непрерывные дроби применяются преимущественно для изучения отдельных иррациональных чисел, неопределённых уравнений, арифметических законов континуума и тому подобного.

Литература

1. Глейзер Г.И. История математики в школе: 9–10 кл.: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1983. 351 с.
2. Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. Примени математику. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 240 с.